# 內容提要

数学在力学上的应用是明显的，比如力学上的一些計算就要用到数学．但是力学对于数学、比如在几何中的应用，大家就不一定知道的很多了．其实远在2000年前的阿基米德，就已經应用力学上的物体平衡定律等来証明一些几何命題了．学过物理的中学生，都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念；本书引用了这些力学概念，来举例說明它們如何用来証明一些几何命題．內容只涉及中学課程里的一些物理和几何的知識，不涉及深奧的理論．

# 編者的話

数学課外讀物对提高学生的学习兴趣，学好数学，以及扩大他們的数学知識領域，具有重要的意义。近年来，越来越多的中学教师和中学生，都迫切希望出版更多的适合青年人閱讀的通俗数学讀物。在一些关心青年数学教育的数学家的热情敦促下，我們約請了一些数学工作者，編写这一套“青年数学小丛書”，准备陆續分批分册出版，想来适应这样一个要求。

考虑到这套小丛書是中学生的課外讀物，在編写时，我們希望做到：不脫离学生現有的知識水平，又必須在已有基础上逐步加深和提高，以培养学生深入鑽研的精神；要介紹一些課外的饒有趣味的富有启发性的数学知識，但又不完全脫离当前数学內容，或把高等数学中的內容簡单的搬过来。

这是我們的初步想法和尝試。热切地希望数学工作者和讀者对我們的工作提出宝貴的意見和建議，更希望数学工作者为青年人写出更多更好的数学課外讀物。

北京市数学会

1962年四月

# 作 者 的 話

北京市数学会举办1962年度数学竞赛，在竞赛之前，先对中学生作了几次講演。这本書就是我所作的一次講演稿，由李培信、江嘉禾两位同志記录，并由江嘉禾同志执笔整理，謹此志謝。

吳 文 俊

1962年四月

# 目　次

# 前　言

数学、力学以及其他各学科，尽管它們研究的对象形形色色，使用的方法千变万化，但它們有一个共同的目的，卽它們都是为了認識客观世界的規律性并用来改造客观世界而发生、发展和壮大起来的。在这个共同的目的之下，数学和力学更是一对亲密的战友，它們互相支援和推动，彼此启发和帮助。

数学对于力学的作用是显明的。由于数学研究的对象非常普遍，研究的范围也就极其广泛，不論是自然科学、工程技术、国民經济以至于日常生活都不能不和数学打交道；特别是力学，更要用到数学。数学对力学家說来几乎是"不可一日无此君"。

但是反过来，力学对数学的帮助也并不小：从小的方面来說，某些数学定理用力学方法来証明就很簡单，某些数学問題从力学着眼来考虑就可能提供一些解决的办法；从大的方面来說，由力学出发，还可能提供新的数学思想、新的数学方法，从而产生新的数学分支。 自然，这样的作用并不是力学所独有的。 数学是一門基础科学，它是認識和改造客观世界的重要武器之一，尽管經过长期的发展，数学有一套独特的理論系統，个别的数学家在个别的时期表面上和外界脫节，但就数学

整体以及整个数学家队伍来說，为生产实践服务不仅是它的主要目的，也可以說是它的唯一目的。它不能不經常对外来任务提供或摸索解决办法，还通过它不断从外界吸收营养，来壮大自己的力量。这种外来的推动来自各个方面，但从历史的久远和影响的巨大来看，力学的作用特別显著。例如，微积分的产生，力学就起了决定性的作用。在十六世紀英国工业革命的結果，工业的迅速发展和技术革新都要求深入了解物体的运动規律，因而对力学提出了很多急待研究的問題；要解决这些問題，原来的数学工具已經不够用了，迫切需要一个新的数学工具。这就是微积分产生的原因。

力学对数学的应用甚至可以追溯到2000年前。那时是罗馬帝国称雄的时代，有一位著名的科学家阿基米德。他对于物体在液体中的浮沉原理的发現是众所周知的，在中学的物理教科書中，就提到它。他在数学上的主要貢献是一些几何图形的面积和体积的計算。这些在今天看来仍然不是輕而易举的，而在当时就更难得了。阿基米德从力学考慮入手提供了新的方法．这些方法用比較近代的观点来看，属于积分的范围。阿基米德的主要著作之一就叫做“一些几何命題的力学証明”。

学过物理的中学生，都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念。本書引用了这些力学概念，举例說明它們如何用来証明一些几何命題。

本書內容只涉及中学課程里的一些物理和几何的知識，不涉及深奥的理論。

# 一 重心概念的应用

一根棒，如果它的質量均匀分布，它的重心就在棒的中央；如果棒的質量不是均匀的，密度大小各处不同，它的重心就可能偏在某处。但是不管怎样，只要在重心那一点把棒支起，就可以讓这根棒达到平衡(图1)。同样，在一个平板的重心那一点将这平板支起，也能达到平衡(图2)。在最簡单的情形，只有两个質点 $M_1$ 和 $M_2$，它們的質量分别是 $m_1$ 和 $m_2$，那么这两个質点的重心 $M$ 就在 $M_1$ 和 $M_2$ 这两点的連綫上(图3)。它把綫段 $M_1M_2$ 分成下面这个比例：

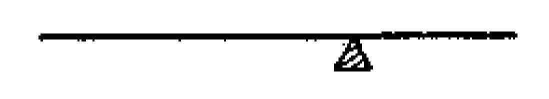


图 1.

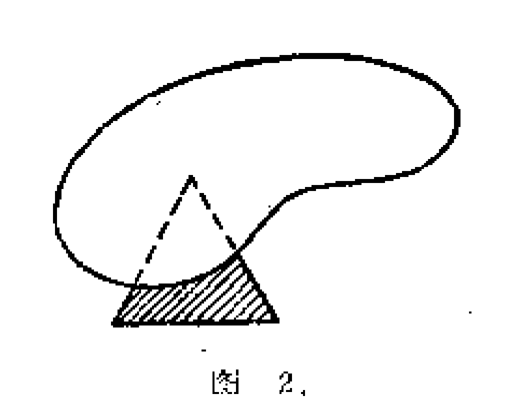


图 2.

$$d_1 : d_2 = m_2 : m_1.$$

三角形有許多有趣的性質是大家熟悉的。例如，三条中綫交于一点(重心)，三条高交于一点(垂心)，三条内分角綫交于一点(内心)，等等。我們現在从力学出发来証明三条中綫交于一点。

設想有一个三角形板，質量均匀分布。那么它的重心应該在什么地方呢？我們把这个三角形板分成許多沿底边平行

$M_1(m_1)$ $M(m_1+m_2)$ $M_2(m_2)$

$d_1$ $d_2$

图 3.

的狭条(图 4)。当这些狭条分得很細时，它的重心就在它的中点。所有这些狭条的重心就都在三角形板底边的中綫上，因此整个三角形板的重心也就在这条中綫上。同样道理，这个三角形板的重心也在另外两条中綫上。可見三角形的三条中綫相交在一点，即这个三角形的重心。

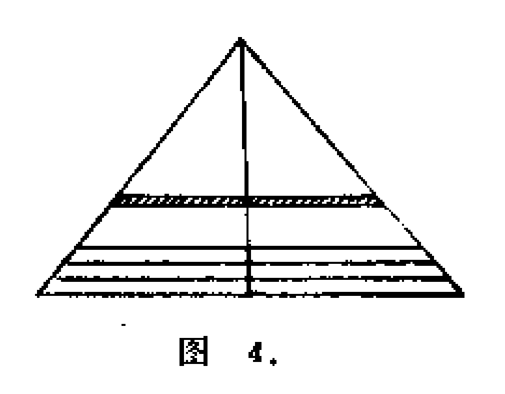


图 4.

我們也可以换一种方法来考慮。設想在三角形的三个頂点处有相同的質量 $m$(图 5)。我們来看这三个質点的重心应該在什么地方？質点 $B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心在底边 $BC$ 的中点 $D$ 处，質量是 $2m$。質点 $D(2m)$ 和質点 $A(m)$ 的重心，也就是三个質点 $A(m)$、$B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心，应該在 $AD$ 这条中綫上，并且这个重心 $M$ 将綫段 $AD$ 分成下面的比例：

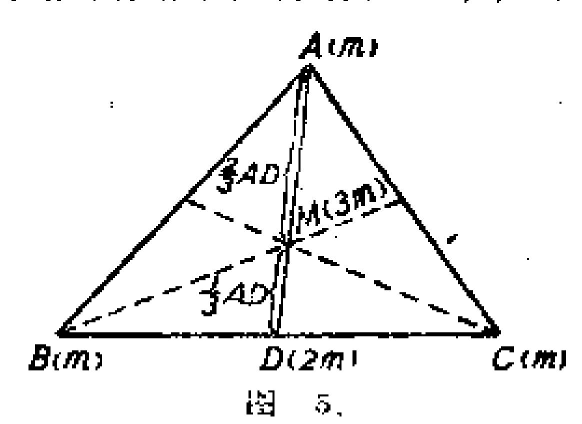



图 5.

$$AM:MD=2m:m,$$

即 $AM=2MD$。可見 $AM=\frac{2}{3}AD$, $MD=\frac{1}{3}AD$。同样道理，重心 $M$ 也应該在另外两条中綫上。于是三条中綫都相交在重心 $M$ 这一点，它和每个頂点的距离等于相应中綫长度的 $\frac{2}{3}$。

上面是設想三个頂点处有相同的質量的情形。現在我們来看如果这三个頂点处質量不同，将会发生什么情形？例如，

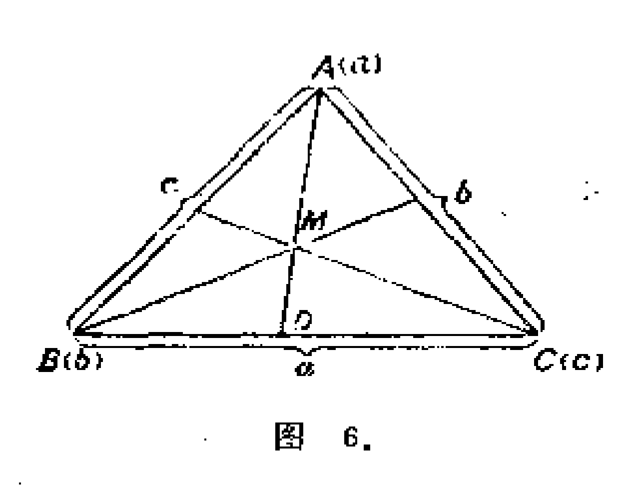


图 6.

在頂点 $A$ 处的質量等于对边 $BC$ 的长度 $a$；同样，在另外两个頂点 $B$、$C$ 处的質量也等于它們对边的长度 $b$、$c$（图 6）。質点 $B$、$C$ 的重心 $D$ 在綫段 $BC$ 上，它把綫段 $BC$ 分成下面的比例：

$$BD:DC=c:b=AB:AC.$$

可見 $AD$ 是角 $A$ 的平分綫（三角形的角平分綫把对边分成的两綫段和两条邻边成比例）。于是質点 $A$ 和 $D$ 的重心，也就是整个質点系 $A$、$B$、$C$ 的重心 $M$，应該在这条角平分綫 $AD$ 上。同样道理，这个重心也应該在另外两条角平分綫上：这样，我們就很清楚地看出了三角形的三內角平分綫应該交于一点。

如果我們把三頂点处的質量分布再变化一下（图7，角 $A$、角 $B$、角 $C$ 都是銳角），也可以証明三角形的三条高交于一点。

現在我們考虑更一般的情形。設想通过三角形 $ABC$ 的每个頂点处有一条直綫（图 8），把对边分成的比例分别是 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$，即

$$BD:DC=\alpha,$$

$$CE:EA=\beta,$$

$$AF:FB=\gamma.$$

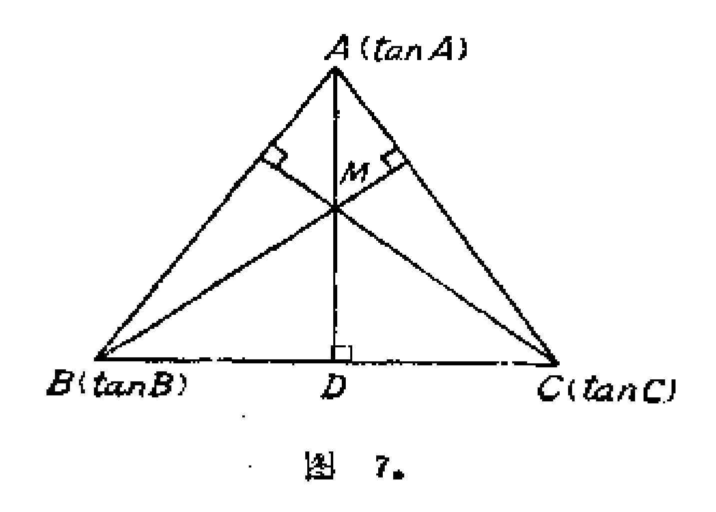


图 7.

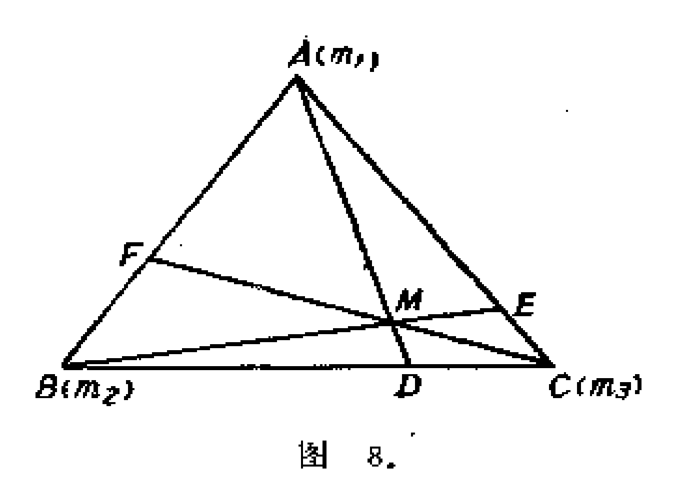


图 8.

假若 $AD$、$BE$、$CF$ 这三条直綫交于一点，我們来看 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 之間有什么样的关系．設想在頂点 $A$、$B$、$C$ 处分别有質量 $m_1$、$m_2$ 和 $m_3$，我們总可以选择 $m_1$、$m_2$、$m_3$ 使得 $F$ 是質点 $A$、$B$ 的重心，同时 $E$ 是質点 $A$、$C$ 的重心，即选择 $m_1$、$m_2$、$m_3$ 使得

$$m_2 : m_1 = \gamma, \quad m_1 : m_3 = \beta.$$

所以，显然整个質点系 $A$、$B$、$C$ 的重心 $M$ 应該在 $BE$ 和 $CF$ 的交点处．既然直綫 $AD$ 也通过这个重心，所以 $D$ 一定是質点 $B$、$C$ 的重心（假若 $B$、$C$ 的重心不是 $D$ 而是另外一点 $D'$，那么整个質点系 $A$、$B$、$C$ 的重心也就不在 $AD$ 上，而在 $AD'$ 上了），因此也应該有

$$m_3 : m_2 = \alpha.$$

所以，如果 $AD$、$BE$、$CF$ 交于一点 $M$，那么

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{m_3}{m_2} \cdot \frac{m_1}{m_3} \cdot \frac{m_2}{m_1} = 1.$$

反过来，如果 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$，我們总可以选择适当的 $m_1$、$m_2$、$m_3$，作为 $A$、$B$、$C$ 的質量，使得質点 $B$、$C$ 的重心正好在 $D$，質点 $C$、$A$ 的重心正好在 $E$，而同时質点 $A$、$B$ 的重心也正好在 $F$（例如，讓 $m_1 = 1$，$m_2 = \gamma$，$m_3 = \frac{1}{\beta}$）．因此整个質点系 $A$、$B$、$C$ 的重心应該同时在 $AD$、$BE$、$CF$ 这三条直綫上，可見这时 $AD$、$BE$、$CF$ 交于一点．这样，我們就証明了三角形的西瓦(Ceva)定理：$AD$、$BE$、$CF$ 交于一点的充分必要的条件是

$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.

从上面这些例子看来，应用力学的重心概念不仅可以簡化某些几何命題的証明，很自然地得到所要的結論，而且也能够自然而然地发現某些几何事实。我們再举一例来說明如何利用重心概念来发現一个几何图形的性質。

設想在一个四面体（图 9）的四个頂点 $A$、$B$、$C$、$D$ 处有相同的質量 $m$。質点 $A$、$B$ 的重心在綫段 $AB$ 的中点 $M_{AB}$；質点 $C$、$D$ 的重心在綫段 $CD$ 的中点 $M_{CD}$. 所以質点 $M_{AB}$ $(2m)$ 和質点 $M_{CD}$ $(2m)$ 的重心，也就是整个質点系 $A$、$B$、$C$、$D$ 的重心 $M$，应該在綫段 $M_{AB}M_{CD}$ 的中点。同样，这个重心 $M$ 也应該在 $BC$ 的中点 $M_{BC}$ 和 $AD$ 的中点 $M_{AD}$ 的連綫上，也在 $M_{AC}$ 和 $M_{BD}$ 的連綫上。因此，如果把 $AB$ 和 $CD$ 叫做对边，那么，我們就十分自然地看出：四面体的三双对边的中点联綫相交在一点，即四面体的重心。

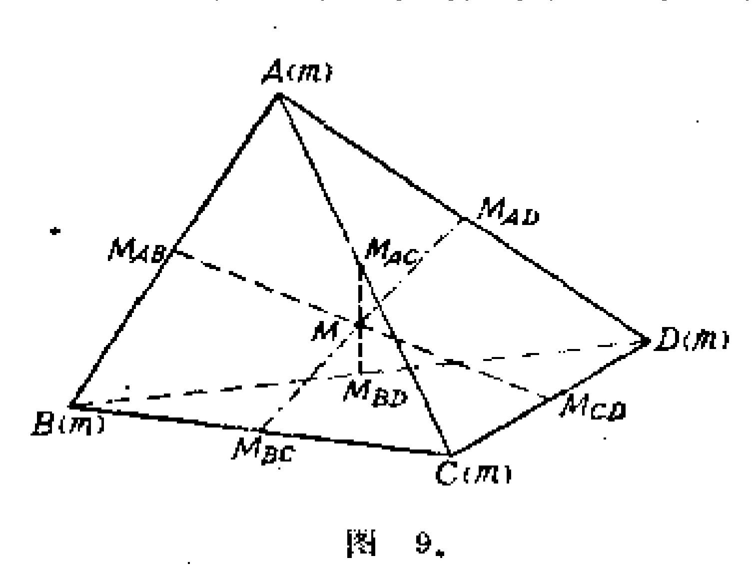


图 9.

我們也可以換一种方法来求这个重心 $M$。質点 $B$、$C$、$D$ 的重心 $M_{BCD}$ 在三角形 $BCD$ 的重心处，即三条中綫的交点。因此

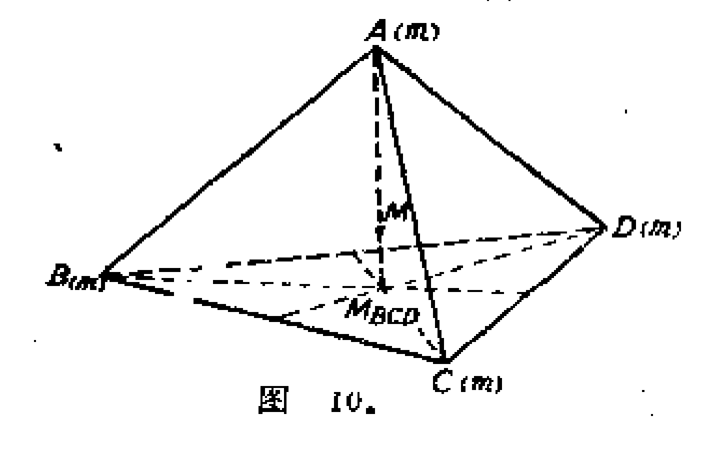


图 10.

整个質点系 $A$、$B$、$C$、$D$ 的重心 $M$，就在綫段 $AM_{BCD}$ 上，即質点 $A(m)$ 和質点 $M_{BCD}(3m)$ 的重心所在处．于是綫段 $AM$ 的长度等于 $AM_{BCD}$ 的长度的 $\frac{3}{4}$。同样，这个重心也在綫段 $BM_{CDA}$、$CM_{DAB}$ 和 $DM_{ABC}$ 上。因此，$AM_{BCD}$、$BM_{CDA}$、$CM_{DAB}$ 和 $DM_{ABC}$ 这四个綫段又应該相交在 $M$ 这一点。这样，我們很自然地发现了上面所說的几何事实，即四面体 $ABCD$ 共有七条上面所說的特殊綫段相交在一点。

对于四面体，我們考虑了在各个頂点处質量分布相同的情形。如果各个頂点处的質量各不相同，我們又可以得到什么样的結論呢？是否可以得到类似于三角形的西瓦定理那样的命題呢？这个問題留給讀者自己去解答。

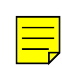
## 二 力系平衡概念的应用

力，是造成运动改变的原因，通常用一个箭头来表示：箭头的方向表示力的作用方向，箭头的起点表示力的作用点，箭头的长短表示力的大小（图 11）。可見，一个力是由三个因素組成，即力的方向、大小和作用点。下面我們把一个力記为 $\vec{a}$ 并把它的大小記为 $|\vec{a}|$。

图 11.

我們設想用一条理想的繩来拉一个物体（图12），只要使用的力一样大，作用的方向一样，那么不論这个力作

图 12.



用在繩上哪一点，它所产生的效果总是一样的。这个性質就是力的传递性。 力既然有传递性，所以有时也可以不考虑力的作用点，而只考虑力的方向和大小。

現在設想有一物体受許多力的作用，这些力构成一个力系。这个力系对这物体所产生的总效果究竟怎样呢？我們先考虑两个力，它們作用在一点，总的效果就象物体受单独一个力的作用一样，这个力称为这二力的**合力**，它的方向、大小可用下面这个几何方法求得：在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的作用綫相合时，合力是很明显的；假使不相合，那么以力 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角綫就可代表这合力 $\vec{a}+\vec{b}$ 的大小和方向，也就是力 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的总效应（图13）。如果这两个力不交于一点，但作用綫交于一点，那么可以把这两个力移到这个交点后，再应用上述平行四边形法则来求得它們的合力。如图 13 所示，合力 $\vec{a}+\vec{b}$ 和力 $\vec{a}$ 作成的角是 $\beta$，和力 $\vec{b}$ 作成的角是 $\alpha$，那么

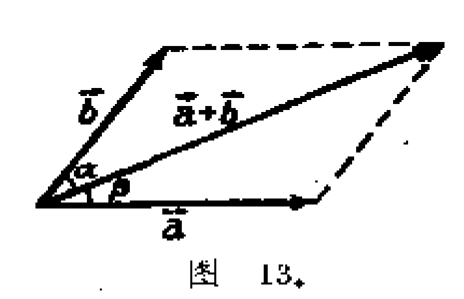


图 13.

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

如果一个平面上的二个力 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的作用綫平行，它們的方向又相同（图 14），那么合力 $\vec{a}+\vec{b}$ 的作用綫和这二力的作用綫平行，其間的距离 $d_1$ 和 $d_2$ 有下面的关系：

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

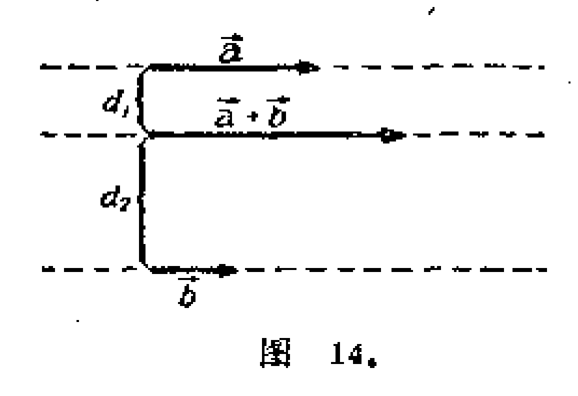


图 14.

合力$\vec{a}+\vec{b}$的方向也就是这二力的方向，合力的大小是这二力大小的和：

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

假如$\vec{a}$和$\vec{b}$的作用綫平行，但方向相反，并且力$\vec{a}$、$\vec{b}$的大小不等(图15)，那么合力的作用綫也和力$\vec{a}$、$\vec{b}$的作用綫平行，它跟这两条直綫的距离$d_1$和$d_2$有下面这个关系：

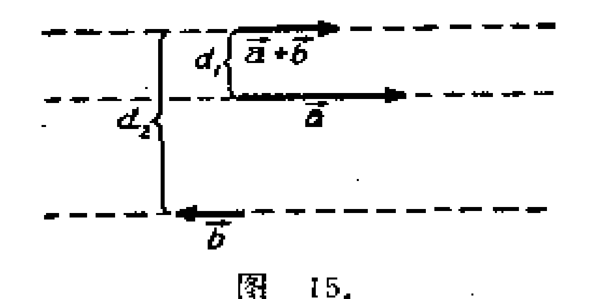


图 15.

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

合力的方向是这二力中較大的一力的方向，合力的大小是这二力大小的差：

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|.$$

假如力$\vec{a}$和$\vec{b}$的作用綫平行，方向相反，并且力$\vec{a}$、$\vec{b}$的大小相等(图16)，那么这二力的总效应是一个旋轉，因此不能用一个单純的力来代替．这时候力$\vec{a}$、$\vec{b}$称为一个**力偶**．

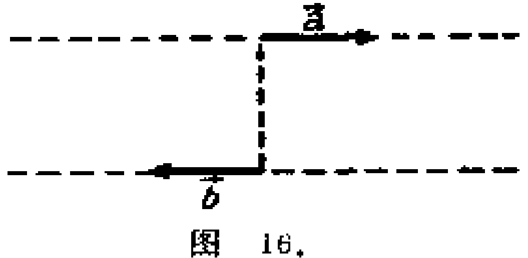


图 16.

因此，对于由許多在同一平面上的力組成的一个平面力系，我們总可以依次一个一个地加起来，最后求得整个力系的总效应，或者能够用一个单純的力来代替，或者它的总效应是一力偶．

如果一个力系的合力是零，就是它的总效果对所作用的物体并无影响，那么称这力系处在平衡状态．例如在同一条作用綫上的二力大小相等方向相反，那么这二力成平衡． 三

个力中二力的合力和第三力成平衡，那么这三力也平衡。我們有下面这个簡单原理：

**原理 I** 平面三力成平衡，那么三力綫或者平行，或者交于一点（图17）。

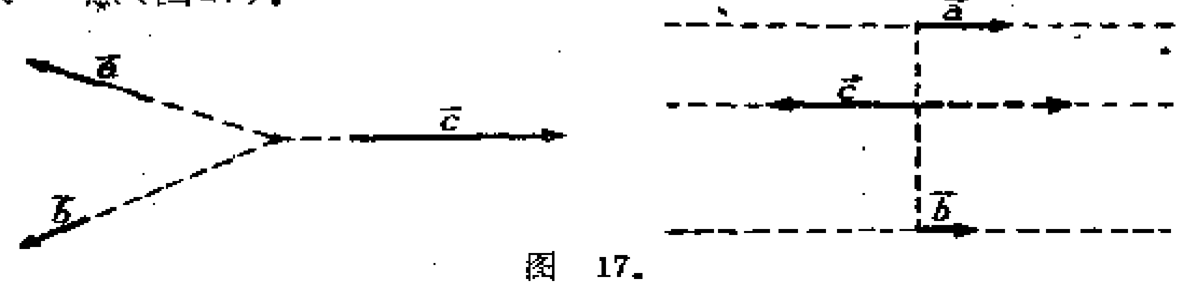



图 17.

可以利用这个原理証明某三条不相平行的直綫交于一点，只要能設法找到三个力成平衡。而它們的作用綫就是要考虑的那三条直綫。下面举些例子来說明这个原理的应用。

設想在三角形 $ABC$ 的底边 $BC$ 上有二力 $\vec{a}$ 和 $\vec{a'}$ 成平衡，在边 $AC$ 上有二力 $\vec{b}$ 和 $\vec{b'}$ 成平衡，在边 $AB$ 上也有二力 $\vec{c}$ 和 $\vec{c'}$ 成平衡（图 18），因此整个力系处在平衡状态。再設各个力的大小都相等：

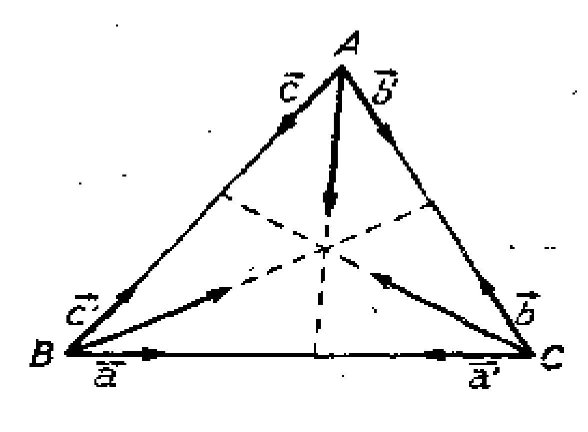



图 18.

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a'}|=|\vec{b'}|=|\vec{c'}|(\neq 0).$$

現在我們換一种方法来計算这力系的合力：如图 18 所示，力 $\vec{b'}$ 和力 $\vec{c}$ 的合力，用这二力所决定的平行四边形的对角綫来表示。既然 $|\vec{b'}|=|\vec{c}|$，所以这条对角綫也就是頂角 $A$ 的平分綫，即 $\vec{b'}+\vec{c}$ 的作用綫是 $A$ 角的平分綫。同样，$\vec{a}+\vec{c'}$ 的作用綫是 $B$ 角的平分綫，$\vec{a'}+\vec{b}$ 的作用綫是 $C$ 角的平分綫。既

然整个力系处于平衡状态，所以这三条作用綫交于一点（平行不可能，为什么？ 讀者可自己考虑一下）。这样，利用力的平衡概念，很簡单地証明了三角形三內角平分綫交于一点。

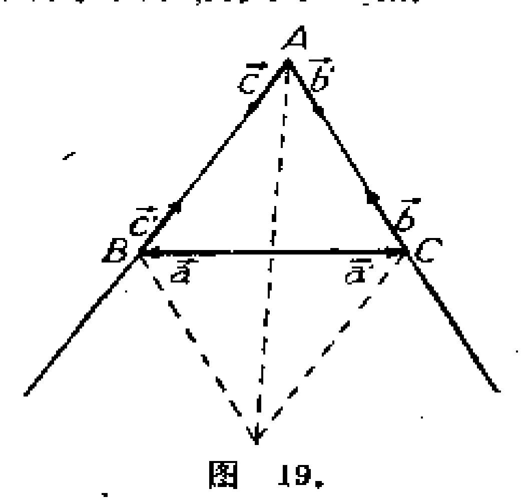


图 19.

将图 18 各个力的分布稍加变动，如图 19 所示，将力 $\vec{a}$ 和 $\vec{a}'$ 对調，也可以很自然地看出：三角形一內角的平分綫和其余两外角的平分綫交于一点。

上面考虑的是假定所有各力的大小都相等的情形。如果要使整个力系平衡，只讓每边上的二力大小相等也就可以了。我們来看看在这种情形下，又可以得到什么样的結論。如图 20 所示，如果通过頂点 $A$、$B$、$C$ 的三条直綫 $AD$、$BE$、$CF$ 相交在一点，那么总可以选择如图 20 上的力系，使 $\vec{a}$、$\vec{c}'$ 的合力的作用綫是 $BE$，而 $\vec{a}'$、$\vec{b}$ 的合力作用綫是 $CF$，即使得

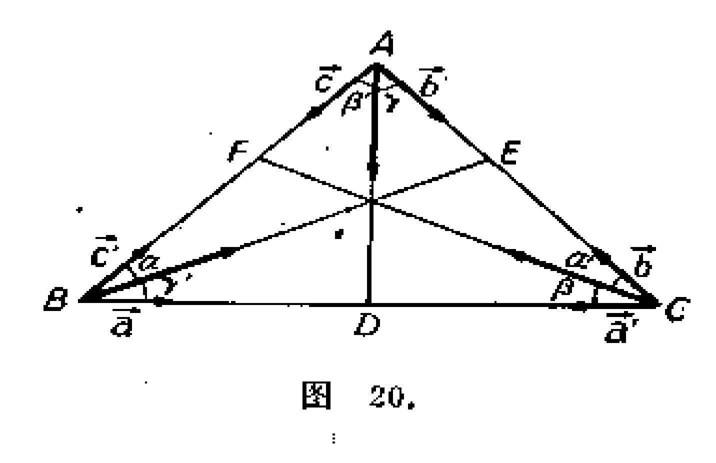


图 20.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma'}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}'|},\qquad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha'}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}'|};$$

$$|\vec{a}|=|\vec{a}'|,\quad |\vec{b}|=|\vec{b}'|,\quad |\vec{c}|=|\vec{c}'|.$$

由于整个力系平衡，所以力 $\vec{b}'$ 和 $\vec{c}$ 的合力作用綫应該通过 $BE$ 和 $CF$ 的交点，即 $\vec{b}'$ 和 $\vec{c}$ 的合力作用綫是 $AD$，因此也就有

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta'}=\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b'}|}.$$

从而
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma'}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta'}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c'}|}\cdot\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a'}|}\cdot\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b'}|}$$
$$=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|}\cdot\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}=1,$$

即
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}=1.$$

反之，假如这个条件满足，那么总可以找到上面这种平衡力系，使得

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma'}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c'}|},\quad\frac{\sin\beta}{\sin\alpha'}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a'}|},\quad\frac{\sin\gamma}{\sin\beta'}=\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b'}|}.$$

因而三条合力作用綫 $AD$、$BE$、$CF$ 交于一点．这个事实也称为三角形的西瓦定理，它和前面所提到的西瓦定理事实上是等价的．将图20的平衡力系稍加变动，如图21所示，也可得到类似的結果(由于質量必須是正的，所以这一情形不能利用質量概念来推出)．

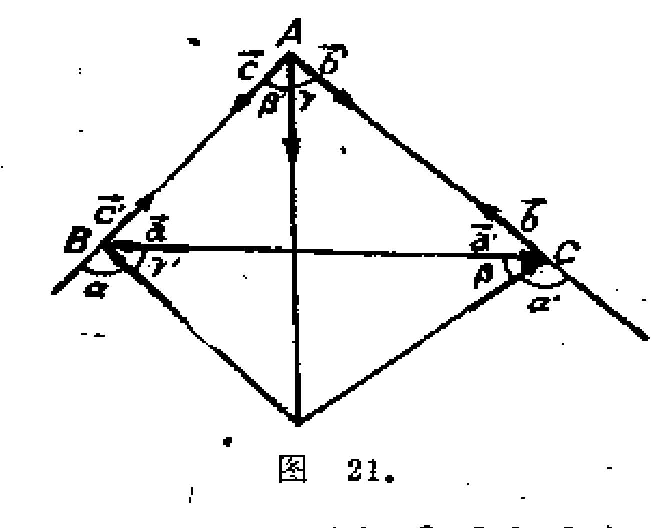


图 21.

对于力系平衡概念，我們还有下面这个簡单原理：

**原理Ⅱ** 假如平面力系有一不等于0的单純合力，通过 $A$、$B$、$C$、……各点，那么 $A$、$B$、$C$、……在一直綫上(图22)，即在这合力的作用綫上．

A B C

图 22.

这个原理可以用来証明某些几何图形某几点共綫的命题，即考虑一力系，它的总效果就是它的合力通过这些点。

我們利用这个原理来証明：三角形二內角平分綫和其余一外角平分綫各和对边的交点在一直綫上①。如图23所示，在三角形 $ABC$ 的三边 $BC$、$CA$ 和 $AB$ 各取一力 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，它們的大小相等：

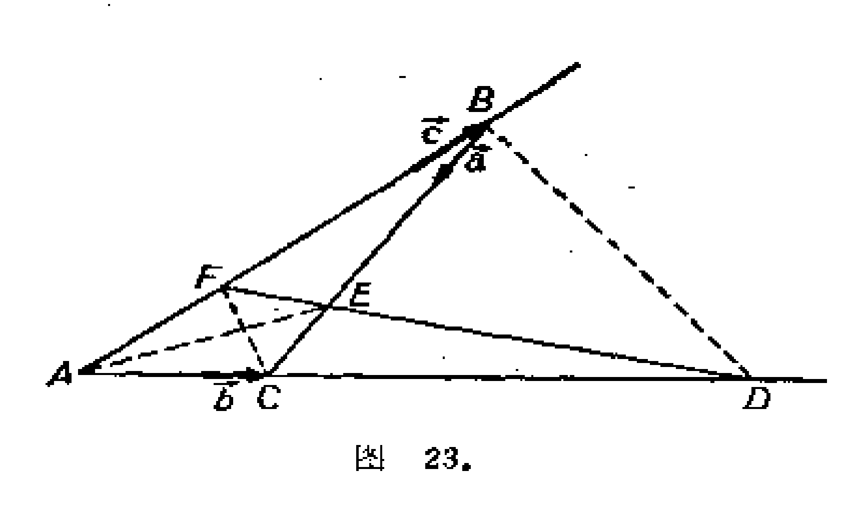


图 23.

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}| \quad (\neq 0).$$

将力 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 移到顶点 $A$，由于它們的大小相等，合力 $\vec{b}+\vec{c}$ 的作用綫是角 $A$ 的平分綫 $AE$。既然力 $\vec{a}$ 的作用綫是 $BC$，所以整个力系的合力 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 应該通过 $AE$ 和 $BC$ 的交点，即合力 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 通过点 $E$。同样，先考虑 $\vec{a}+\vec{b}$ 或 $\vec{a}+\vec{c}$，也自然看出这个合力要通过角 $C$ 的內角平分綫 $CF$ 和对边的交点 $F$，也通过角 $B$ 的外角平分綫 $BD$ 和对边的交点 $D$。既然合力 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 通过 $D$、$E$、$F$ 三点，并且显然 $\neq 0$，可見 $D$、$E$、$F$ 在一直綫上。

原理Ⅱ不仅可以用来“証明”几点共綫的几何命题，而且能够十分自然地“发現”这种命题。假如，在图 23 中的三力，

① 在这里和以后所举例中，我們都假定不出現平行的情形，虽然这个情形仍可作类似的考虑。

如果大小不等，我們会得到什么样的結論呢？如图 24 所示，通过頂点 $A$、$B$、$C$ 的三直綫 $AE$、$BD$、$CF$，各和对边相交在 $E$、$D$、$F$ 三点，它們和其余两邻边的夹角分别記为 $\gamma,\beta';\alpha,\gamma';\beta,\alpha'$。我們总可以选择三个力 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，使得

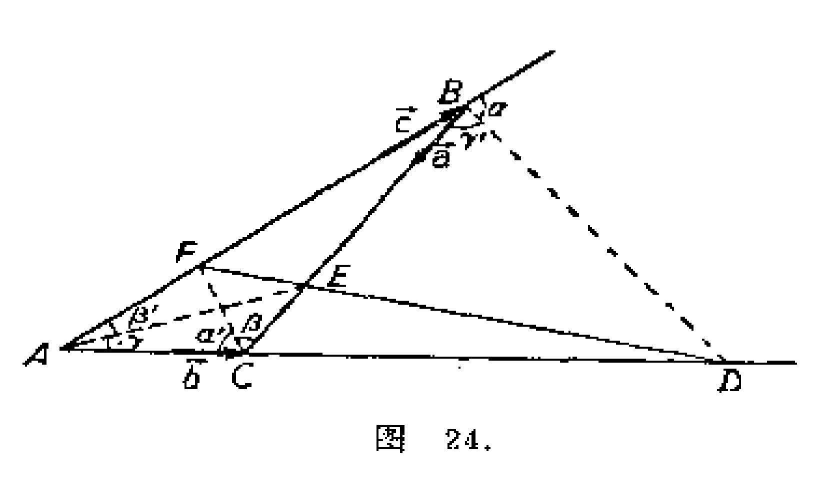


图 24.

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha'}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|},\quad \frac{\sin\gamma}{\sin\beta'}=\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|},$$

即 $\vec{a}+\vec{b}$ 的作用綫是 $CF$，$\vec{b}+\vec{c}$ 的作用綫是 $AE$。因此整个力系的合力 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的作用綫是直綫 $EF$。現在假如 $E$、$F$、$D$ 三点在一直綫上，即合力作用綫 $EF$ 通过点 $D$，由于力 $\vec{b}$ 通过点 $D$，所以力 $\vec{a}+\vec{c}$ 也必須通过点 $D$，即 $BD$ 是力 $\vec{a}+\vec{c}$ 的作用綫，因此也有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma'}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|}.$$

于是，当 $E$、$F$、$D$ 三点共綫时，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}=1.$$

反过来，假如这条件成立，按照上面所取的力系 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，自然也有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma'}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|},$$

即 $\vec{a}+\vec{c}$ 的作用綫是 $BD$。由此可見，$E$、$F$、$D$ 三点共綫。我

們从力系平衡概念出发得到的这个命題叫做三角形的美耐拉(Menelaus)定理。

由平面上四条直綫 $L_1$、$L_2$、$L_3$、$L_4$ 构成的图形叫做一个完全四边形（图 25），它有六个頂点 $A_{12}$，$A_{34}$；$A_{13}$，$A_{24}$；$A_{14}$，$A_{23}$，其中 $A_{12}$，$A_{34}$ 称为相对頂点，等等。它有四条边以及四个三角形。在每一頂点处有两条角平分綫，互相垂直，这些角平分綫中有些三条交于一点，即四个三角形的四个內心和十二个傍心。我們現在从力学考虑出发，来看它还有什么别的几何性質。我們在每一条直綫上作一个力，$\vec{a_1}$ 在 $L_1$ 上，$\vec{a_2}$ 在 $L_2$ 上，等等，如图 25 所示。这些力的大小都相等：

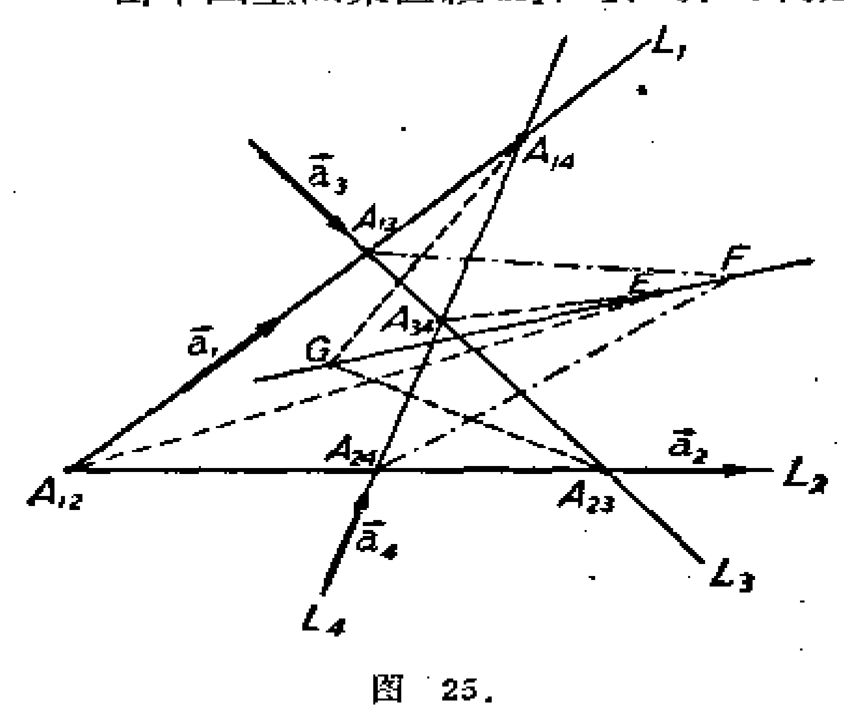


图 25.

$$|\vec{a_1}|=|\vec{a_2}|=|\vec{a_3}|=|\vec{a_4}| \quad (\neq 0).$$

将力 $\vec{a_1}$ 和 $\vec{a_2}$ 移到頂点 $A_{12}$，它們的合力作用綫应当是在 $A_{12}$ 处的一条角平分綫。再将 $\vec{a_3}$ 和 $\vec{a_4}$ 移到頂点 $A_{34}$ 处，它們的合力作用綫又应当是在 $A_{34}$ 处的一条角平分綫。因此整个力系的合力 $\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}+\vec{a_4}$ 的作用綫应該通过这两条角平分綫的交点 $E$。同样，分别考虑合力 $\vec{a_1}+\vec{a_3}$ 和 $\vec{a_2}+\vec{a_4}$ 时，整个力系的合力作用綫也要通过頂点 $A_{13}$ 处的一条角平分綫和对

頂点 $A_{24}$ 处的一条角平分綫的交点 $F$. 同样,这条作用綫也通过頂点 $A_{14}$ 和 $A_{23}$ 处两条角平分綫的交点 $G$. 既然 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_4$ 的合力通过 $E$、$F$、$G$ 这三点,可見 $E$、$F$、$G$ 在一条直綫上. 于是,我們从力学的考虑出发,很自然地发現了完全四边形三双相对頂点处的角平分綫的交点在一直綫上. 象这样的直綫一共有 8 条. 这个事实是到十九世紀才发現的;从几何的考虑出发,証明却并不簡单.

我們再利用原理Ⅱ来証明有名的巴斯加 (Pascal) 定理:圓内接六边形三双对边延綫的交点在一直綫上 (图 26). 在圓内接六边形中边 $A_1A_2$ 和 $A_4A_5$ 称为相对边,它們的交点是 $E$,相对边 $A_2A_3$ 和 $A_5A_6$ 的交点是 $F$,而 $A_3A_4$ 和 $A_6A_1$ 的交点是 $G$. 巴斯加发現 $E$、$F$、$G$ 三点在一直綫上,在当时只是一种趣味性的結果,意义并不很大,但到十九世紀却发現这个定理对圓錐曲綫也成立,并且可以作为整个圓錐曲綫的理論基础. 我們中学里的几何学主要是考虑几何图形的度量性質,叫做欧几里得几何. 在十九世紀中,出現了一門新的几何学,以研究图形的平直、相交等所謂投影性質为主,叫做投影几何. 这一門几何学的創立、发展和奠定基础,是十九世紀不少主要几何学家专注工作的結果. 到十九世紀

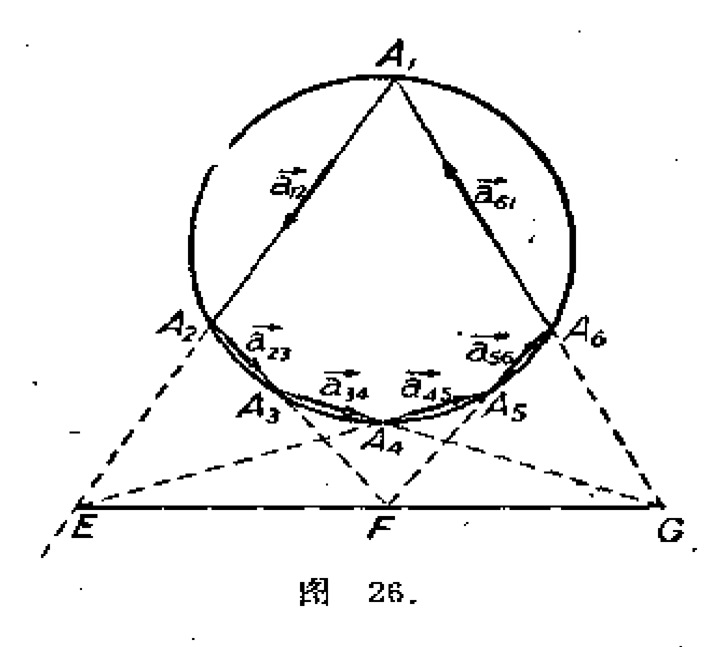


图 26.

来，他們还发現整个投影几何可奠基在一些簡单命题以及巴斯加定理(或跟它相当的定理)之上，而巴斯加定理在这些命题里又占据着特殊位置。因此，在今天看来，巴斯加定理的意义就和发現时的情况完全不同了。

为了利用原理Ⅰ来証明巴斯加定理，我們应該設法找出一个力系，使它的合力通过 $E$、$F$、$G$ 三点就行了。在証明之前，我們先来考虑一下，如图27所示，圓内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的每一边上各有一力，在什么条件下，这四个力成平衡？合力 $\vec{a}_{12}+\vec{a}_{14}$ 的作用綫通过 $A_1$，合力 $\vec{a}_{34}+\vec{a}_{32}$ 的作用綫通过 $A_3$。因此，假如要 $\vec{a}_{12}$、$\vec{a}_{14}$、$\vec{a}_{34}$、$\vec{a}_{32}$ 平衡，首先必須上面两个合力作用綫重合，即必須对角綫 $A_1A_3$ 同时是 $\vec{a}_{12}+\vec{a}_{14}$ 和 $\vec{a}_{32}+\vec{a}_{34}$ 的作用綫。因此有

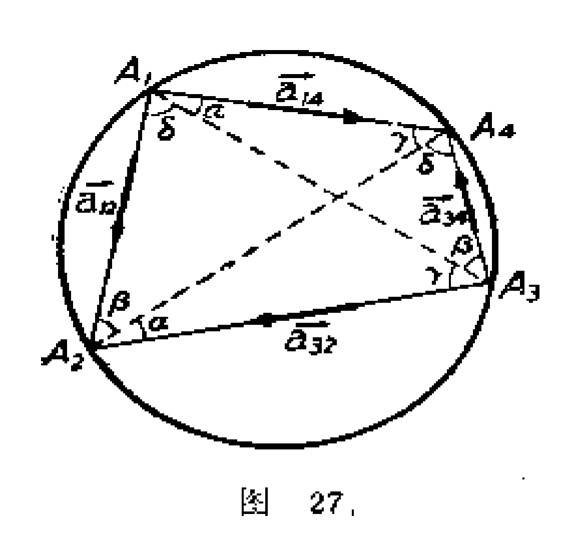


图 27.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}=\frac{|\vec{a}_{12}|}{|\vec{a}_{14}|},\quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{|\vec{a}_{32}|}{|\vec{a}_{34}|}.$$

同样我們也有

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta}=\frac{|\vec{a}_{34}|}{|\vec{a}_{14}|},\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{|\vec{a}_{12}|}{|\vec{a}_{32}|}.$$

按照正弦定理，有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\delta}=\frac{A_3A_4}{A_2A_3},$$

所以

$$\frac{|\vec{a}_{12}|}{|\vec{a}_{14}|}=\frac{A_3A_4}{A_2A_3},$$

即

$$\frac{|\vec{a}_{12}|}{A_3A_4}=\frac{|\vec{a}_{14}|}{A_2A_3}.$$

同理可以得到

$$\frac{|\vec{a}_{12}|}{A_3A_4}=\frac{|\vec{a}_{34}|}{A_1A_2}=\frac{|\vec{a}_{32}|}{A_1A_4}=\frac{|\vec{a}_{14}|}{A_2A_3}.$$

可見，要使力系 $\vec{a}_{12}$、$\vec{a}_{32}$、$\vec{a}_{34}$、$\vec{a}_{14}$ 平衡，必須每一边上的力和对边长度的比是一常数。反过来，也容易驗証，假如这个条件滿足，力系也的确平衡。

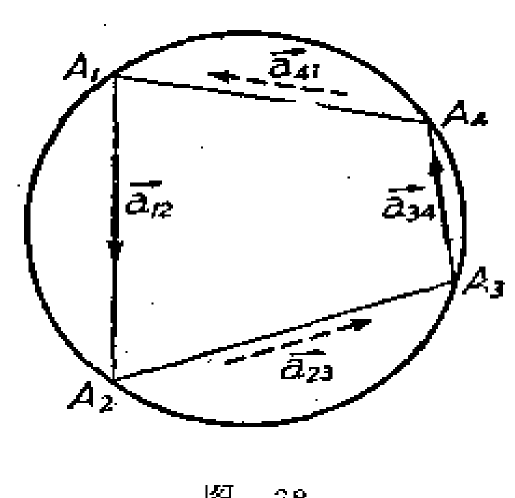



图 28.

根据上面所說的道理，显然如在圓內接四边形的一双对边 $A_1A_2$ 和 $A_3A_4$ 上給了两个力 $\vec{a}_{12}$ 和 $\vec{a}_{34}$（图 28），使得

$$\frac{|\vec{a}_{12}|}{A_3A_4}=\frac{|\vec{a}_{34}|}{A_1A_2},$$

那么，总可以用另一双对边 $A_1A_4$ 和 $A_2A_3$ 上的两个力 $\vec{a}_{23}$ 和 $\vec{a}_{41}$ 去代替，它們的大小和对边长度的比正好就是上面那个已知的比值，即

$$\frac{|\vec{a}_{41}|}{A_2A_3}=\frac{|\vec{a}_{23}|}{A_1A_4}=\frac{|\vec{a}_{12}|}{A_3A_4}=\frac{|\vec{a}_{34}|}{A_1A_2}.$$

因此，这两个新的力和原来两个力的总的效果相同：

$$\vec{a}_{23}+\vec{a}_{41}=\vec{a}_{12}+\vec{a}_{34}.$$

現在来証明巴斯加定理，如图 26 所示，我們在圓內接六边形的每一边上作一个力，設法选取这些力，使得整个力系的合力通过 $E$、$F$、$G$ 三点。我們先考慮使合力通过点 $E$. 力 $\vec{a}_{12}$ 和 $\vec{a}_{45}$ 既然分别在 $A_1A_2$ 和 $A_4A_5$ 上，所以 $\vec{a}_{12}+\vec{a}_{45}$ 自然通过 $A_1A_2$ 和 $A_4A_5$ 的交点 $E$，所以我們只須考慮如何选择其余

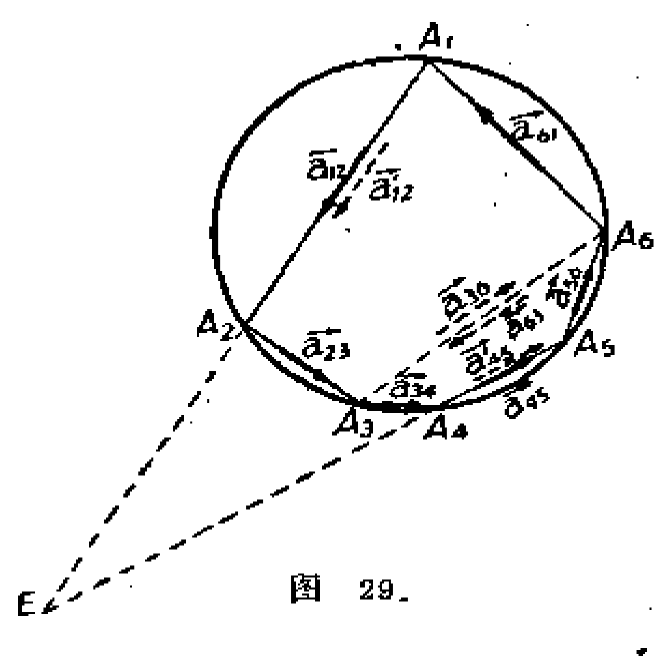


图 29.

四个力使它們的合力通过 $E$ 即可．先看圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_6$ 的对边 $A_2A_3$ 和 $A_1A_6$ 上的两个力 $\vec{a}_{23}$ 和 $\vec{a}_{61}$．根据前面所說的道理，只要这两个力的大小和对边长度成正比，就可以用在另外一双对边 $A_1A_2$ 和 $A_3A_6$ 上的两个力 $\vec{a}'_{12}$ 和 $\vec{a}_{36}$ 去代替(图29)，使得

$$\frac{|\vec{a}_{23}|}{A_6A_1}=\frac{|\vec{a}_{61}|}{A_2A_3}=\frac{|\vec{a}'_{12}|}{A_3A_6}=\frac{|\vec{a}_{36}|}{A_1A_2}.$$

同样，四边形 $A_3A_4A_5A_6$ 的对边 $A_3A_4$ 和 $A_5A_6$ 上的两个力 $\vec{a}_{34}$ 和 $\vec{a}_{56}$ 的大小如果也和对边长度成正比，也可以用在另外一双对边 $A_4A_5$ 和 $A_3A_6$ 上的两个力 $\vec{a}'_{45}$ 和 $\vec{a}_{63}$ 去代替，使得

$$\frac{|\vec{a}_{34}|}{A_5A_6}=\frac{|\vec{a}_{56}|}{A_3A_4}=\frac{|\vec{a}'_{45}|}{A_3A_6}=\frac{|\vec{a}_{63}|}{A_4A_5}.$$

于是整个力系化成了 $\vec{a}_{12}$、$\vec{a}'_{12}$，$\vec{a}_{45}$、$\vec{a}'_{45}$ 和 $\vec{a}_{36}$、$\vec{a}_{63}$，除了最后两个力外，其余各个力的作用綫都通过点 $E$．因此如果我們能够选择圆内接六边形各边上的力，使得

$$\frac{|\vec{a}_{23}|}{A_6A_1}=\frac{|\vec{a}_{61}|}{A_2A_3},\quad \frac{|\vec{a}_{34}|}{A_5A_6}=\frac{|\vec{a}_{56}|}{A_3A_4},\quad |\vec{a}_{36}|=|\vec{a}_{63}|.$$

那么整个力系的合力必定通过点 $E$，因为这时 $\vec{a}_{36}$ 和 $\vec{a}_{63}$ 大小相等、方向相反，结果互相抵銷．

同样，再考虑要求合力通过 $F$、$G$ 两点时，又可得一系列

确定各个力的条件：

$$(F)\qquad \frac{|\overrightarrow{a_{12}}|}{A_3A_4}=\frac{|\overrightarrow{a_{34}}|}{A_1A_2},\quad \frac{|\overrightarrow{a_{45}}|}{A_6A_1}=\frac{|\overrightarrow{a_{61}}|}{A_4A_5},\quad |\overrightarrow{a_{14}}|=|\overrightarrow{a_{41}}|.$$

$$(G)\qquad \frac{|\overrightarrow{a_{12}}|}{A_5A_6}=\frac{|\overrightarrow{a_{56}}|}{A_1A_2},\quad \frac{|\overrightarrow{a_{23}}|}{A_4A_5}=\frac{|\overrightarrow{a_{45}}|}{A_2A_3},\quad |\overrightarrow{a_{25}}|=|\overrightarrow{a_{52}}|.$$

从这些条件很容易看出，我們应該选择各个力大小如下：

$$|\overrightarrow{a_{12}}|=A_3A_4\cdot A_5A_6,\quad |\overrightarrow{a_{23}}|=A_4A_5\cdot A_6A_1,$$
$$|\overrightarrow{a_{34}}|=A_5A_6\cdot A_1A_2,\quad |\overrightarrow{a_{45}}|=A_6A_1\cdot A_2A_3,$$
$$|\overrightarrow{a_{56}}|=A_1A_2\cdot A_3A_4,\quad |\overrightarrow{a_{61}}|=A_2A_3\cdot A_4A_5.$$

不难驗証，这样选出的各个力的确滿足上面所有的条件，因而整个力系的合力(显然 $\neq 0$)既經过 $E$，也經过 $F$ 和 $G$. 于是 $E$、$F$、$G$ 在一条直綫上。

这样通过力学的考虑，很自然地証明了巴斯加定理。直綫 $EFG$ 称为圓內接六边形 $ABCDEF$ 的一条巴斯加綫。上面我們是考虑圓上六个点依次相連而得的內接六边形。我們也可以考虑不依次相連而得的六边形，这样的六边形一共有 60 个。每个这样的六边形都相应有一条巴斯加綫，所以共有 60 条巴斯加綫。在图 30 中的六边形 $A_1A_2A_5A_4A_3A_6$ 的巴斯加綫是 $PQR$. 这些綫所构成的图象曾为十九世紀的許多几何学家所注意，他們断断續續发現了不少有趣的性質，例如这 60 条巴斯加綫，依某一种組合，三三交于

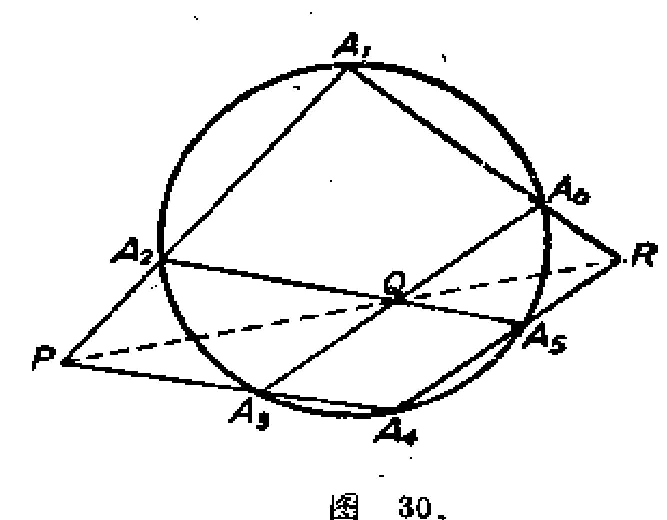



图 30.

一点，称为施太納 (Steiner) 点，这样的点有 20 个。又依另一种組合，也三三交于一点，称为凱克門(Kirkmann)点，这样的点有 60 个。而每一个施太納点又和其他三个凱克門点在一条直綫上，这样的直綫叫卡列-雪尔門 (Cayley-Salmon) 綫，有20条，这 20 条依某种組合，又四四交于一点，共有 15 个这样的点。同样 20 个施太納点依某种組合，又四四在一直綫上，这样的綫也有 15 条，等等。这些定理的証明固然不算很簡单，而它們的能够被“发現”更不容易，只要看这些定理的出現前后有四五十年之久，就可以想象到发現者們的劳动如何艰苦. 可是如果我們使用前面所說的力学方法，那么这些定理的証明和发現，就将几乎是輕而易举的事了。

我們所举的一些例子，多少是近于趣味性的，沒有任何代表性，就象 60 条巴斯加綫所构成的图象那样，即使在几何学里面，也談不上任何重要性。我們的目的，只在說明几何学和力学之間的某种亲密关系，它們的帮助是相互的，力学对于几何学和数学其他分支的发生、发展起过巨大的刺激作用，过去是这样，将来还会是这样。